PRECIOS-SOMBRA PARA IMPUTAR
COSTOS INDIRECTOS EN LA PRODUCCIÓN MÚLTIPLE

Mª Natividad Guadalajara
Enrique Ballestero
Universidad Politécnica de Valencia
Comunicación presentada en el I Encuentro Iberoamericano de Contabilidad de Gestión
(Valencia – Noviembre 2000)

Resumen:

El propósito de este artículo es aplicar un modelo recientemente aparecido en la literatura sobre programación compromiso en la producción conjunta, para obtener unos pesos o precios, que sirvan como vehículos de imputación a los costos no directamente imputables. El modelo se basa en teoremas de enlace entre el análisis multicriterio (MCDM) y las fronteras eficientes de producción múltiple. Los pesos obtenidos poseen importantes propiedades, y en especial, son invariantes respecto al ramillete de productos elegido en el proceso de producción.

El modelo confía en dos asumciones plausibles. La primera de ellas consiste en suponer que los ingresos-sombra deben cubrir los costos totales de producción, cuando ambas variables se evalúan en términos de contabilidad interna. La segunda hipótesis establece que el modelo debe evitar sesgos evaluatorios en favor de cualquiera de los productos que constituyan el ramillete. Se demuestra que los óptimos precios-sombra son inversamente proporcionales a los valores ancla de la programación compromiso, siempre que el punto antiideal sea nulo. En caso contrario, se llega a una fórmula de imputación algo más complicada, pero suficientemente operativa.

1. Introducción

Los escenarios donde se obtiene un producto único reciben el nombre de producción simple. En estos casos, el empresario trabaja con m factores de producción (insumos), cuyas cantidades son v_1, v_2,......,v_m, y recoge al final del proceso una cantidad de producto x. Es evidente que x depende del paquete de insumos (v_1, v_2,......,v_m).

Pero en la mayoría de los procesos productivos, se dan situaciones de producción conjunta o múltiple, en las que se obtienen n productos x_1, x_2,...., x_n, mediante el empleo de unos recursos o inputs, que en muchas ocasiones son compartidos por varios de dichos outputs. Se plantea entonces el problema de imputar el consumo de los recursos comunes a los productos en que intervienen.

En el presente trabajo se realiza una propuesta alternativa de asignación de criterios de imputación de los costes comunes, conjuntos o de estructura en la producción conjunta o múltiple, basada en el análisis compromiso. Este método sería un caso particular del procedimiento de realizar una imputación en función de los precios de los productos, de gran utilidad en aquellos casos en que los outputs o productos carecen de precio de mercado.

Esta circunstancia se puede dar, al menos, en dos ocasiones muy frecuentes:

1) En el caso de la producción de productos/servicios en el sector público, ya sea el sanitario, ya sea el de información-documentación, etc., en los cuales al financiarse vía impuestos el ciudadano no paga, directamente, por el uso de los outputs o productos finales.

2) En la contabilidad de costes, existen ciertas secciones, llamadas intermedias las cuales contribuyen al proceso de producción que se llevan a cabo en otras secciones de la misma

empresa. Las secciones intermedias producen servicios o bienes intermedios que se ponen a disposición de las secciones finales como insumos, pero el precio interno a asignar a estos bienes intermedios no está claramente determinado, sino que resulta de una distribución de costos entre las secciones que reciben los insumos intermedios.

Se trata, pues de llegar a una solución suficientemente precisa al problema de imputar costos internos en ambos casos, y, en general, en todos aquellos en los que el precio de los productos se desconoce.

2. Metodología

La Programación Compromiso (CP) es un área de análisis multicriterio que ha cobrado especial importancia en la literatura actual sobre decisiones y sistemas operativos. En esencia, el método CP consiste en establecer un punto ideal, que se complementa a veces, con un punto opuesto llamado antiideal. Las coordenadas del punto ideal reciben también el nombre de valores ancla, mientras que las coordenadas del antiideal se denominan con frecuencia valores nadir. Según el axioma de Zeleny (1.982), el centro decisor tiende a aproximarse lo más posible a su punto ideal, alejandose también lo más posible, de su punto nadir. Esta base axiomática reposa en investigaciones realizadas dentro de la psicología experimental (Coombs,1.958). Ahora bien, la medida del acercamiento o alejamiento requiere usar una determinada métrica, ya que la métrica euclidiana no es siempre la idónea. Así pues, se contempla una abanico de métricas desde h=1 hasta h tendiendo a infinito. Como acabamos de indicar, la métrica euclidiana h=2 es un caso particular pero relativamente poco usado hasta ahora. Las distancias a los puntos ideal y antiideal se ponderan con pesos preferenciales, que se estiman mediante diálogos interactivos entre el centro decisor y los analistas (Zionts y Wallenius,1.976). De este modo, el centro decisor pone de manifiesto su criterio sobre la importancia relativa que concede a cada atributo. De acuerdo con el teorema de Yu (1.985), todas las soluciones compromiso para las diversas métricas desde 1 hasta infinito se encuentran ubicadas en el llamado conjunto-compromiso sobre la frontera eficiente que separa los puntos accesibles de los inaccesibles. Se demuestra que los límites del conjunto-compromiso acotan el óptimo de utilidad bicriterio para centros inversores estándar (teorema Ballestero y Romero, 1991). Si el centro decisor tiene preferencias particulares por ciertos atributos, el óptimo de utilidad bicriterio se encuentra acotado entre la solución compromiso con métrica infinito y la solución para utilidad lineal (teorema de Ballestero, 1998).

Dentro del esquema compromiso, la asignación de precios sombra (que servirán luego para imputar costes) se desarrolla como sigue. Estos precios-sombra o pesos no son preferenciales, sino que obedecen a leyes de producción y reglas de contabilidad interna asentadas en la literatura.

Supongamos una cesta de productos, definida a través del siguiente vector $(x_1, x_2,.. ,x_i,.., x_n)$, obtenida en un proceso de producción múltiple o conjunta, con un nivel de recursos K_t. Los precios de los inputs o recursos K_t utilizados en la producción conjunta son conocidos, a partir de los cuales se puede obtener el coste en que se incurre para producir la cesta de productos, dentro de la frontera de producción posible. Este coste total o agregado lo llamaremos R_t. A su vez, este coste total se descompone en dos sumandos, el coste directo R_d que no es necesario imputar porque se asigna directamente a los productos, y el coste indirecto R que sí es preciso imputar, de manera que $R_t = R + R_d$.

Dicho de otro modo, el consumo de los recursos K_t suponen unos costos directos R_d más otros indirectos R que el analista debe distribuir entre los productos finales. Estos costes directos R_d dan lugar a una componente del precio de los productos, p_{di}, perfectamente definida. Si prescindimos de estos recursos K_d que se imputan directamente a cada producto, surge el problema de imputar los costos restantes indirectos correspondientes a los recursos K, los cuales contribuyen al proceso productivo en mayor o menor medida sin que existan relaciones de proporcionalidad ni funcionales directas aplicables a la imputación. Para estos costes indirectos R el analista necesita establecer unos precios sombra w_i, de tal forma que la suma $w_i + p_{di}$ dan lugar al precio sombra total p_i.

La frontera de producción posible o eficiente o relación de trueque marginal, que separa los puntos accesibles de los inaccesibles, formada por las restricciones en el modelo de programación lineal, se expresa de la siguiente manera:

$$T\ (x_1, x_2, \dots, x_n) = K$$

Por otro lado, se tienen los valores ancla, más altos, o ideales que pueden tomar los productos:

$$(x^*_1, x^*_2, \dots x^*_n)$$

y los valores nadir, más bajos o no-ideales que pueden tomar los productos:

$$(x_{*1}, x_{*2}, \dots x_{*n})$$

Un sistema de precios-sombra perfecto y consistente debe cumplir dos condiciones:

Primera condición

El valor-sombra agregado de los productos con tales precios (valor-sombra de la cesta de productos) debe cubrir el costo total de los recursos K_t.

De la misma manera, el valor-sombra Q correspondiente exclusivamente a los precios sombra w_i, de la cesta de productos debe ser mayor o igual que el coste indirecto R en que se incurre para producir esos productos, pues de lo contrario la empresa incurriría en pérdidas. Esto es:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (p_i - p_{di}) * x_i = \sum_{i=1}^{n} w_i * x_i \geq (R_t - R_d) = R \qquad [1]$$

Siendo p_i = precio sombra total = $w_i + p_{di}$

En resumen, todo valor de cesta sombra $\sum_{i=1}^{n} w_i * x_i$ asignado a cada ouput $(x_1, \dots x_i, \dots x_n)$ que puede ser producido con el nivel de recursos K debe cubrir los costes indirectos R de K .

Por ejemplo, supongamos un proceso de producción conjunta en un centro de atención primaria de salud que produce consultas (x_1) y analíticas (x_2), y una frontera de producción o relación de intercambio o de sustitución, para el recurso de personal (que es el único común, todos los demás recursos son directos y se asignan directamente a cada producto), dada por:

$$x_1 + 3\ x_2 = 60 \text{ equivalente a } \qquad x_1/60 + x_2/20 = 1$$

Si el coste conjunto o indirecto de mano de obra en que se incurre al producir las cestas (60,0), (30,10), (15,45) y (0,20), todas ellas situadas en la frontera eficiente es de 300 u.m., y el valor-sombra o ingreso-sombra de cualquier cesta de la frontera es:

$$Q = w_1 * (\ 60\text{-}\ 3*x_2) + w_2 * x_2$$

Se ha de cumplir que:

$$Q = w_1 * (60 - 3*x_2) + w_2 * x_2 \geq 300$$

Los valores ancla o ideales de x_1 y x_2 son 60 y 20 respectivamente, pues son las cantidades máximas que se pueden producir dentro de la restricción frontera, y los valores no-ideales o nadir serían para ambos productos 0.

Segunda condición

El margen de producción Q – R, entre el valor-sombra de la cesta de productos y el coste de los recursos conjuntos o indirectos consumidos en su producción, debe ser estimado de forma prudencial evitando sobreestimaciones.

Ambas condiciones se pueden unir de la siguiente manera:

$$\text{Min } (Q - R)$$

$$\text{restricción } Q = \sum_{i=1}^{n} w_i * x_i \geq R \qquad [2]$$

donde la minimización restringida se extiende a cualquier cesta de productos dentro de la frontera. De esta manera, los precios sombra minimizarán cualquier diferencia entre un valor sombra de la cesta y el coste de los inputs conjuntos utilizados, al mismo tiempo que se aumenta la riqueza de la empresa.

En los teoremas que se enuncian a continuación (Ballestero y Romero, 1993), se obtienen los precios-sombra que cumplen las dos condiciones [2].

Teorema 1:

Sea una frontera de producción eficiente, interceptando cada eje x_i en un punto $(0,......x^*_i,.......0)$, todos los anti-ideal (x_{*i}) son nulos y el valor de R es real y positivo, los pesos tales como:

$$w^*_1 \; x^*_1 = ...= w^*_i \, x^*_i =..........= w^*_n \, x^*_n = R$$

se demuestra que son los únicos que satisfacen [2], y son, por tanto, precios-sombra perfectos y consistentes.

Teorema 2:

Sea una frontera de producción eficiente, interceptando cada eje x_i en un punto $(0,......x^*_i,.......0)$, los valores anti-ideal (x_{*i}) no son todos nulos, sino que hay alguno distinto de cero y el valor de R es real y positivo, los pesos tales como:

$$w^*_1 \; (x^*_1 - x_{*1}) = ...= w^*_i \, (x^*_i - x_{*i}) =..........= w^*_n \, (x^*_n - x_{*n}) = r$$

$$\text{siendo } r = \frac{R}{1+\sum_{i=1}^{n} \frac{x^*_i}{x^*_i - x_{*i}}}$$

se demuestra que son los únicos que satisfacen [2], y son, por tanto, precios-sombra perfectos y consistentes.

3. Aplicaciones y resultados

Caso 1.- Todos los puntos nadir son nulos

Sea un hospital de agudos en cuya sección intermedia de Laboratorio produce 3 clases de análisis A, B y C. Dichos análisis consumen en cantidades diferentes los recursos de personal, materiales reactivos y equipos, los cuales se utilizan todos ellos de manera conjunta y se disponen en cantidades limitadas, de acuerdo con las siguientes relaciones o restricciones:

$x_A + x_B + x_C \leq 30$ para el personal
$x_A + 2\, x_B + 4\, x_C \leq 100$ para los materiales
$3\, x_A + x_B + 6\, x_C \leq 60$ para los equipos

Donde:

x_A = número de análisis de A producidos
x_B = número de análisis de B producidos
x_C = número de análisis de C producidos

Además, es posible no producir cualquiera de los tres análisis en un periodo determinado, con lo cual $x_A \geq 0$, $x_B \geq 0$, $x_C \geq 0$, y , en consecuencia, los valores nadir son nulos para los tres productos.

De acuerdo con las restricciones anteriores, los valores ancla de los tres productos son[1]:

$x_A = 20$, definido en la restricción de equipos, correspondiente a la cesta de productos (20,0,0)
$x_B = 30$, definido en la restricción de personal, correspondiente a la cesta de productos (0,30,0)
$x_C = 10$, definido en la restricción de equipos, correspondiente a la cesta de productos (0,0,10)

Se sabe que los costes correspondientes a los tres recursos de producir cualquier cesta de productos A, B y C, situada en la frontera eficiente es de 500.

Según el teorema 1, los precios sombra w_A, w_B y w_C para los tres recursos alcanzarán los siguientes valores:

$w_A = 500 /20 = 25$
$w_B = 500 /30 = 16{,}66$
$w_C = 500 /10 = 50$

Veamos su comprobación, se ha de cumplir el siguiente sistema:

Min $\quad w_A\, x_A + w_B\, x_B + w_C\, x_C - 500$
Restricción $w_A\, x_A + w_B\, x_B + w_C\, x_C \geq 500$

para cualquier punto de la frontera eficiente.

La frontera eficiente viene definida por las tres restricciones y en ella se encuentran infinitos puntos. Se trata de encontrar varios puntos de la frontera eficiente y aplicar el sistema de programa lineal anterior. Obviamente, los tres valores ancla anteriores se encontrarán en la frontera eficiente.

[1] Los valores ancla se obtendrán calculando el valor máximo que puede alcanzar cada producto en cada restricción, y dado que se trata de restricciones se elegirá el mínimo de todas las restricciones. De esta manera el valor elegido (mínimo de los máximos) se encontrará en la frontera eficiente.

Una forma sencilla de obtener otros puntos de la frontera es hallando los vértices de la frontera mediante el cálculo de las soluciones básicas. Estas soluciones básicas se obtendrán resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$x_A + x_B + x_C + VH_1 = 30$
$x_A + 2\, x_B + 4\, x_C + VH_2 = 100$
$3\, x_A + x_B + 6\, x_C + VH_3 = 60$

donde VH_1, VH_2 y VH_3 son las variables de holgura. Como se tienen 6 variables y 3 ecuaciones, dan lugar a 20 sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, con lo cual se obtienen 20 soluciones básicas o vértices de la frontera eficiente, y de esas 20 se eligen solo las positivas, para que tenga sentido económico.

Un ejemplo de ellas son (1, 23.4, 6), (0, 24, 6), (15,15,0), (19.3, 2, 0), (20,0,0), (0,30,0) y (0,0,10).

Otra forma de obtener puntos de la frontera eficiente sería buscar valores que satisfagan la igualdad en una restricción y no cumplan las otras dos restricciones.

Aplicando el sistema de programación lineal a los valores anteriores, se tiene:

Min $1\, w_A + 23{,}4\, w_B + 6\, w_C - 500$
O
Min $24\, w_B + 6\, w_C - 500$
O
Min $15\, w_A + 15\, w_B - 500$
O
Min $19{,}3\, w_A + 2\, w_B - 500$
O
Min $20\, w_A - 500$
O
Min $30\, w_B - 500$
O
Min $10\, w_C - 500$

Sujeta cualquiera de ellas, a las restricciones:

$1\, w_A + 23{,}4\, w_B + 6\, w_C \geq 500$
$24\, w_B + 6\, w_C \geq 500$
$15\, w_A + 15\, w_B \geq 500$
$19{,}3\, w_A + 2\, w_B \geq 500$
$20\, w_A \geq 500$
$30\, w_B \geq 500$
$10\, w_C \geq 500$

cuyo resultado coincide con lo esperado.

Caso 2.- Algún punto nadir es no nulo

Sea una explotación agrícola que produce 4 cultivos: trigo, cebada, maíz y arroz, para lo que dispone de recursos: superficie, agua y mano de obra en cantidades limitadas. Las restricciones que definen la frontera de producción eficiente son:

$x_T + x_C + x_M + x_A \leq 250$ para el recurso superficie
$8\, x_T + 2\, x_C + 20\, x_M + 25x_A \leq 2.000$ para el recurso agua
$x_T + x_C + 3\, x_M + 4\, x_A \leq 600$ para el recurso mano de obra

Donde:

x_T = Número de hectáreas cultivadas de trigo
x_C = Número de hectáreas cultivadas de cebada
x_M = Número de hectáreas cultivadas de maíz
x_A = Número de hectáreas cultivadas de arroz

Además, por cuestiones de autoconsumo en la explotación se deben producir cebada y trigo en las cantidades:

$x_T \geq 20$
$x_C \geq 15$

Con lo cual los valores ancla y nadir son:

$x^*_T = 235$ obtenido en la primera restricción $x_{*T} = 20$
$x^*_C = 230$ obtenido en la primera restricción $x_{*C} = 15$
$x^*_M = 90{,}5$ obtenido en la segunda restricción $x_{*M} = 0$
$x^*_A = 72{,}4$ obtenido en la segunda restricción $x_{*A} = 0$

Los costes agregados de los tres recursos para cualquier cesta de productos situadas en la frontera eficiente son de 7.600. En consecuencia, los precios sombra para los tres recursos se obtendrán de acuerdo con el teorema 2.

$$w^*_T\ (235- 20) = w^*_C\ (230\text{-}15) = w^*_M\ (90{,}5\text{-}0) = w^*_A\ (72{,}4\text{-}0) =$$

$$= \frac{7.600}{1 + (\frac{20}{235-20} + \frac{15}{230-15} + \frac{0}{90{,}5-0} + \frac{0}{72{,}4-0})}$$

De donde resulta:

$w^*_T = 30{,}4$
$w^*_C = 30{,}4$
$w^*_M = 72{,}22$
$w^*_A = 90{,}27$

Estos resultados los podemos comprobar igualmente, aplicando la técnica de programación lineal a diversas cestas de productos de la frontera eficiente. Algunas de estas cestas de productos o conjunto de valores de la frontera se pueden obtener utilizando los valores ancla y nadir, con los cuales se pueden deducir los siguientes puntos (235,15,0,0), (20,230,0,0), (20,15,90.5,0) y (20,15,0,72.4)

Otros puntos de la frontera, se podrían obtener maximizando una función objetivo cualquiera, sujeta a las restricciones del problema, pero obligando a que pertenezcan a una o a varias rectas de la frontera, por ejemplo:

$max=x_T+x_C+x_M+x_A$

Restricci:

$x_T+x_C+x_M+x_A=250;$
$8*x_T+2*x_C+20*x_M+25*x_A<=2000;$
$x_T+x_C+3*x_M+4*x_A<=600;$
$x_T>=20;$
$x_C>=15;$

De esta manera se obtienen varios puntos de la frontera eficiente, haciendo variar la función a maximizar y aplicando el signo igual a una o a varias de las restricciones.

Algunos de estos puntos son: (230,15,0,5), (20,170,0,60), (30,162.6, 0,57.4) y (35,159,0,56)

El programa lineal a aplicar para la resolución de los precios-sombra será:

$min=235*x_T+15* x_C -7600;$
$20* x_T +230* x_C =7600;$
$20* x_T +15* x_C +90.5* x_M =7600;$
$20* x_T +15* x_C +72.4* x_A =7600;$
$230* x_T +15* x_C +5* x_A >=7600;$
$20* x_T +170* x_C +60* x_A >=7600;$
$30* x_T +162.6* x_C +57.4* x_A >=7600;$
$35* x_T +159* x_C +56* x_A >=7600;$
$235* x_T +15* x_C =7600;$

con el que se obtiene el mismo resultado que el obtenido en el teorema.

4. Conclusiones

A pesar de que el método CP se trata de una técnica un tanto compleja por el aparato matemático que utiliza, su aplicación a la contabilidad de gestión resulta sumamente sencilla a través de los teoremas 1 y 2, y resuelve perfectamente, de manera objetiva, el problema de asignación de precios a los productos en la producción múltiple.

Bibliografía

AMAT, O.; BLANCO, F. et al. (1994). Introducción a la Contabilidad de gestión. Ed. McGraw-Hill.

AMAT, O.; RIPOLL, V. et al. (1995). Contabilidad de gestión avanzada: planificación, control y experiencias prácticas. Ed. MacGraw-Hill.

ASOCIACIÓN ESPAÑOLA DE CONTABILIDAD Y ADMINISTRACIÓN DE EMPRESAS (1995). Los costes conjuntos y comunes en la empresa. Principios de Contabilidad de Gestión. Documentos 8, 2ª edición.

ASOCIACIÓN ESPAÑOLA DE CONTABILIDAD Y ADMINISTRACIÓN DE EMPRESAS (1996). Costes indirectos de producción: localización, imputación y control. Principios de Contabilidad de Gestión. Documentos 7.

ASOCIACIÓN ESPAÑOLA DE CONTABILIDAD Y ADMINISTRACIÓN DE EMPRESAS (1997). La contabilidad de gestión en las Entidades Públicas. Principios de Contabilidad de Gestión. Documentos 15.

BALLESTERO, E. (1998). Approximating the optimum portfolio for a investor with particular preferences. Rev. Journal of the Operational Research Society, 49, 998-1000.

BALLESTERO, E. y ROMERO, C. (1991). A theorem connecting utility function optimization compromise programming. Rev. Operations Research Letters, 10, 421-427.
BALLESTERO, E. y ROMERO, C. (1993). Weighting in compromise programming: A theorem on shadow prices. Rev. Operations Research Letters, 13, 325-329.
BALLESTERO, E. y ROMERO, C. (1996). Portfolio Selection: A Compromise Programming Solution. Rev. Journal of the Operational Research Society. 47, 1377-1386.
BALLESTERO, E. y ROMERO, C.(1998). Multiple Criteria Decision Making and its Aplications to Economic Problems. Ed. Kluwer Academic Publishers
BAUMOL, W.J. and QUANDT, R.E. (1971). Dual prices and competition, en The Theory of the Firm (ARCHIBALD G.C. ed), Penguin Books, New York, 422-447.
BLANCO, F. (1990). Contabilidad de costes para la toma de decisiones en el marco de la Contabilidad de gestión. Ed. Deusto.
BLANCO, F. (1999). Contabilidad de costes y analítica de gestión para las decisiones estratégicas. Ed. Deusto.
COOMBS, C. H. (1958). On the use of inconsistency of preferences in psychological measurement. Rev. Journal of Experimental Psychology, 55, 1-7.
GUADALAJARA, N. (1994). Análisis de costes en los hospitales. Ed. M/C/Q.
GUADALAJARA, N. (1996). Análisis de costes en centros residenciales. Ed. I.N.S.E.R.S.O. Ministerio de Trabajo y Asuntos Sociales.
YU, P.L. (1985) Multiple-Criteria Decision Making: Concepts, Techniques and Extensions. Ed. Plenum Press, New York.
ZELENY, M. (1982). Multiple Criteria Decision Making. Mc Graw Hill, New York.
ZIONTS, S. y WALLENIUS, J. (1976). An interactive multiple objective linear programming method for a class of underlying nonlinear utility functions. Rev. Management Science, 22, 652-663.

Agradecimientos a Javier Ribal, profesor del departamento de Economía y Ciencias Sociales por su colaboración en la revisión del trabajo.